# *SOBRE COLORAÇÃO DE ARESTAS EM GRAFOS CICLOS E COMPLETOS*

***Rafael Augusto Marques da Costa***
***Engenharia Elétrica***
***Orientadora: Diana Sasaki Nobrega***

## *RESUMO*

Grafos são estruturas matemáticas que consistem em vértices ligados por arestas que modelam relações de objetos. Os abordados neste estudo serão os ciclos e os completos. Nesse primeiro, os vértices são ligados por arestas fechando um ciclo da seguinte forma: $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_1$ e no segundo todos os vértices estão ligados entre si. O Teorema de Vizing afirma que o índice cromático (mínimo de cores para pintar as arestas) de um grafo está sempre entre o seu grau máximo ($\Delta$-maior grau dentre os graus de todos os seus vértices), para grafos com *n* par, e o seu grau máximo mais um ($\Delta + 1$), para grafos com *n* ímpar. Nos grafos ciclos, essa diferença entre *n* pares e ímpares acontece porque no primeiro ao começar a coloração da aresta $X_1 - X_2$ com 1, terminaremos colorindo a aresta $X_{n-1} - X_n$ com 1 também, pois o caminho $X_1 - X_n$ terá sempre um número ímpar de arestas $(n-1)$. Ou seja, terão acabados os pares de coloração $1-2$ e ainda sobrará uma aresta a ser pintada, onde será usada a cor 1. Dessa forma, é obrigatório colorir a aresta $X_1 - X_n$ com a cor 2, uma vez que ambos os vértices $X_1$ *e* $X_n$ possuem coloração 1. Para n ímpar, o caminho $X_1 - X_n$ terá um número de arestas pares $(n-1)$. Logo, terá pares fechados de coloração e ao começar a pintar a aresta $X_1 - X_2$ com 1, obrigatoriamente, terá a aresta $X_{n-1} - X_n$ com a cor 2. Como $X_1$ possui cor 1 e $X_n$ já possui cor 2, então, para colorir a aresta $X_1 - X_n$ se usa uma terceira cor. Para os grafos completos, existe uma quantidade máxima de arestas que cada cor cobre sem que nenhum vértice receba cores repetidas. Ela é obtida através da divisão inteira do número de vértices por *2*, pois cada aresta liga dois vértices. Assim, encontra-se o índice cromático dividindo a quantidade total de arestas do mesmo pela quantidade máxima de arestas que cada cor pode cobrir. Para *n* par, é possível que cada vértice receba todas as cores (emparelhamento perfeito para todas as cores) e para isso acontecer de forma que nenhuma cor se repita, o índice cromático tem

que ser igual a quantidade de arestas por vértice ($\Delta$). Para *n* ímpar, não há nenhum emparelhamento perfeito, porque nele não há cor que chegue a todos os vértices, pois cada aresta cobre 2 vértices e não é possível formar pares com todos os vértices para cada cor, já que *n* não é divisível por 2. E ao colorir com $\Delta$ cores, cada cor colorindo $\frac{n}{2}$ arestas não será possível que nenhuma dessas outras cores pinte as arestas que sobram, e logo precisa de mais uma cor para isso ($\Delta + 1$).

***Palavras-chave:*** Teorema de Vizing, Grafos Completos, Grafos Ciclos.